

“ARMONIA” DEI NUMERI PRIMI

L'apparente relazione tra musica e numeri primi.

Di: Enrico Zanella

Una notte sognai una cifra numerica. Non ricordo assolutamente il contesto in cui essa affiorò, ma dell'immagine di quel lungo numero non ebbi dubbio alcuno. La cosa a dire il vero non mi stupì del tutto dal momento che poco tempo addietro mi rimase impressa, già scritta sullo spartito, un'intera prima parte di sonata per pianoforte in stile Schubert. Quella notte infatti verso le 2 mi alzai e trascrissi sulla carta ciò che appariva già scritto nella mia mente.

Il fatto dunque di ricordare un numero non era poi così straordinario. Eccolo:

1 5 3 6 8 9

La mattina ormai luminosa di quello stesso giorno, riscontrai con simpatia che quella cifra era in realtà una serie numerica che celava in sé una logica di composizione. Tale logica è: il quarto numero della cifra (il 6) è la somma dei primi due numeri (1+5); il quinto numero (8) è la somma del secondo e terzo (5+3); il sesto numero è la somma del terzo e quarto (3+6). Quindi, a titolo di esempio, il numero successivo a 9 sarà 14 ovvero la somma del quarto e quinto numero della cifra (6+8).

Il mio interesse per la serie sognata, dopo tale scoperta, conobbe un anno di sospensione, ritenendola fondamentalmente lo scherzo di un qualche demonietto notturno.

Dovette trascorrere circa un anno prima di riprenderla e constatare un'altra straordinaria coincidenza.

Essendo musicista notai che i primi tre numeri 1,5,3, sono anche le note che costituiscono un accordo a livello base: la cosiddetta triade. Un accordo si costruisce infatti sovrapponendo ad una prima nota detta fondamentale la sua terza e la sua quinta. Partendo dunque dalla scala di Do maggiore ovvero DO RE MI FA SOL LA SI DO e prendendo come prima la nota di DO, la sua terza sarà MI e la sua quinta SOL, avremo:

DO MI SOL

che rappresenta la triade detta di Do maggiore. Se partissimo da RE la triade sarebbe:

RE FA LA

partendo infatti da RE come prima, la sua terza è FA e la sua quinta LA.

Il confronto tra la teoria musicale della triade ed il nostro numero potrebbe far nascere qualche perplessità, due delle quali sono: 1) la triade si costruisce come 1 3 5 e non come 1 5 3 (come appare nella serie);2) rimangono da giustificare la presenza degli altri tre numeri (6 8 9) che con quanto detto a proposito della triade non hanno niente a che fare.

Ricordai allora che il nostro “numero” era una serie con logica interna; se fosse stata 1 3 5 6 8 9 (convenendo così con la teoria della triade) quella regola di composizione sarebbe venuta meno.

Provando allora a sostituire i numeri con le note ho ottenuto il seguente risultato:

1	5	3	6	8	9
C	G	E	(1+5)	(5+3)	(3+6)
		C+G	G+E	(3+1+5)	
			E+C+G		

Ovvero sostituendo secondo la logica originaria di composizione della serie numerica, nel numero 9 sintetizzo la triade di DO maggiore giustificando così la presenza dei numeri 6 8 9 in una serie che se avesse dovuto spiegare la triade semplicemente come 1 3 5 li avrebbe trovati superflui. Il significato astratto di tale coincidenza potrebbe essere espresso con il concetto cartesiano secondo il quale “i numeri sonori sono 2, 3 e 5, corrispondenti alle consonanze d’ottava, quinta e terza maggiore. **In altri termini, Cartesio ha una visione dinamica delle grandezze musicali, e individua in quella che sarà poi chiamata la triade maggiore il centro propulsore dinamico della struttura musicale**”.(cfr. Compendium musicae)

Il numero magico sembra giustificare apparenti idiosincrasie: se non fosse stata quella esatta cifra, non sarebbe una serie con logica interna la quale, a sua volta, sostiene la teoria della triade. La questione così posta ha sicuramente un certo fascino ma lascia il dubbio che si tratti di una coincidenza, straordinaria, ma fine a se stessa.

Dovettero trascorrere ancora alcuni mesi prima che la mia attenzione notasse una coincidenza a dir poco incredibile.

Esiste una scienza chiamata “fisica armonica” che studia le frequenze che concorrono a formare il suono. È una scienza antichissima già studiata presso i pitagorici per i quali la musica era espressione dell’armonia naturale e solo l’uomo educato musicalmente era potenzialmente pronto a diventare virtuoso. La definizione fisica matematica di tali frequenze, dovuta al francese J. Sauveur (1701) cui va anche la scoperta, prevede una serie precisa di frequenze dette armoniche naturali. Prendendo come esempio la nota di DO come fondamentale ecco la serie come appare naturalmente (i suoni vanno intesi dal grave verso l’acuto):

					
					
					(MI)	
				RE	(10)	
			DO	9		
		LA#	8			
		MI	6			
		DO	3			
		SOL	(1)			
	DO	5				
	DO	(1)				
	1					

Queste sono le frequenze principali, in realtà poi da un certo punto in avanti, procedono cromaticamente all’infinito.

Ma come si può notare escludendo la ripetizione dei DO (1) e il MI (10) la serie degli armonici naturali coincide con il nostro numero magico.

Quindi “1 5 3 6 8 9” è: 1) una serie logica, 2) sostiene la teoria della triade, 3) rappresenta la serie degli armonici naturali e ciascun aspetto è “conditio sine qua non” per l’altro.

Rimaneva però un'altra questione. Come mai la serie si fermava al numero 9 escludendo gli altri armonici? La risposta potrebbe essere insita nel fatto stesso del "conditio sine qua non" che giustificerebbe una cosa permettendone un'altra ad essa connessa, eppure il cerchio non sembrava chiuso.

Fu così che dopo qualche giorno la scoperta della relazione tra il nostro numero e la serie degli armonici, verificai una cosa che sembrò giustificare quest'ultima perplessità e al tempo stesso mi sconvolse.

"1 5 3 6 8 9" ovvero 153.689 è un NUMERO PRIMO.

Subii letteralmente uno sconvolgimento in quanto l'ultima scoperta, verificata grazie alla messa a punto di un semplice quanto intelligente programma ad opera di un caro amico ingegnere, segnava l'ennesima escalation di una coincidenza che prendeva sempre più le fattezze di un FENOMENO.

Il numero primo, tanto caro ai matematici che lo ritengono un mattone su cui si fonda la matematica stessa, rappresenta qualcosa di unico e fisso, un riferimento immutabile, un PUNTO FERMO.

Il fenomeno della serie degli armonici è una legge naturale che tradotta numericamente mantiene, sotto forma di numero primo, lo stesso senso di legge. Destino vuole, a conferma dell'unicità della serie degli armonici naturali, che il numero letto al contrario ovvero 986.351 sia ugualmente numero primo, suggerendo una vera e propria inflessibilità!?

La perplessità riguardo la serie degli armonici sembrava così risolta: se il "numero" avesse contenuto anche il 10 ovvero il corrispondente dell'armonico MI (rispetto a DO) la serie non sarebbe stata: né dotata di logica interna; né espressione della triade; rappresentazione sì degli armonici naturali, ma non più numero primo. Si sarebbe persa, in altre parole, la "conditio sine qua non".

E' come se il nostro "numero magico" volesse trasmetterci tutte le informazioni necessarie e sufficienti per condurre ulteriori speculazioni riguardo il presunto rapporto tra musica e numeri primi.

ESEMPIO DALLA LETTERATURA

A questo punto non restava che verificare nella pratica se questa relazione trovava riscontro.

Decisi di prendere in esame uno dei capolavori della letteratura musicale classica ovvero l'Arte della Fuga (contrappunto 1 ; fuga a quattro voci) di Johann Sebastian Bach. La scelta a dire il vero fu suggerita dal fatto che il compositore tedesco fu sempre attratto dalla numerologia, e in molte sue opere lo si riscontra. Questa allora mi sembrò la scelta più indicata.

Il risultato fu strabiliante. Solo le prime tredici battute contenevano una serie incredibile di numeri primi a una, due, tre e quattro cifre; sia in senso melodico che armonico. Il metodo seguito è stato quello di confrontare le voci (sia melodicamente che armonicamente) sostituendo alla nota il numero in relazione alla tonalità d'impianto: il contrappunto 1 è in tonalità di Re minore quindi:

RE	MI	FA	SOL	LA	SI ^b	DO	RE
1	2	3	4	5	6	7	8

E la fuga comincia con la sequenza: RE LA FA RE che costituisce una **frase musicale** e che numericamente tradotta diventa: 1 5 3 1 quando 1531 è un numero primo. Questo è fin da subito un esempio pratico di sequenza melodica corrispondente ad un numero primo. La stessa cosa avviene armonicamente ovvero per voci sovrapposte (accordi).

L'aver trovato così tanti numeri primi in così poco spazio mi ha fatto ragionevolmente pensare ad una vera e propria coincidenza. Mi piace usare tale termine dal momento che non credo assolutamente in una sorta di Intervento divino di cui rappresenterei il portavoce. E tantomeno si tratta di magia nera. Si tratta di una vera coincidenza ma non per questo priva di fascino e forse di una qualche utilità.

Potrebbe ad esempio sostenere praticamente la teoria pitagorica secondo la quale la musica è espressione dell'armonia naturale, in cui l'elemento razionale ed irrazionale (sensibile) si congiungono e dove il numero sancisce il senso di perfezione in essa insito.

MUSICA: GIOCO DI COMPOSIZIONE DI NUMERI PRIMI

Una di queste utilità potrebbe essere la composizione di un brano musicale partendo esclusivamente da inter-connessioni di numeri primi.

Partendo infatti dall'esempio di Bach si può pensare di ricreare una situazione musicale partendo proprio dai numeri primi: ciò che si nota dalla spartito infatti è la grande intelligenza nella loro distribuzione ed organizzazione (ma Bach presumo ragionasse esclusivamente da grande musicista quale era). Come a dire che tanto più è ricercata e armonica (nel senso estetico) la relazione tra i numeri primi, tanto più sarà interessante il risultato sonoro.

Se ad esempio scrivo: 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 ... che in Do maggiore corrisponderebbe a : E E E E E E E E E E è ovvia la monotonia musicale che ne scaturisce nonostante la serie sia una perfetta sequenza del numero primo 3 continuamente collegato con se stesso.

Il GIOCO che propongo dunque è il seguente: **ogni combinazione e relazione melodica ed armonica è possibile purchè sia una concatenazione di numeri primi.**

Qualora volessi scrivere :

```
61
 |
7
 |
2
```

che sarebbe corretta in quanto le tre cifre (2,7,61) sono tutte numeri primi per attribuirgli un significato sonoro, **potrei ricorrere alla matematica modulare: abbiamo detto che il nome delle note si ripete ogni 7; il numero 7 è il nostro modulo base (se si è deciso di prendere come riferimento la scala diatonica, ma il discorso si fa ancora più interessante se si sceglie il modulo 12 (cromatico), o mod 6 (esatonale), o mod 8 (scala ottotonica), o sconfinare in sistemi musicali più complessi). Quindi per attribuire una nota musicale al numero primo 61 ci basterà ragionare in modulo 7 (ad esempio in Do maggiore) ed otterremo la nota SOL*(vedi nota)**

Un suggerimento che mi sento di dare è quello di evitare progressioni armoniche di questo tipo:

```
2---3---5 .....
 |   |   |
2---3---5 .....
 |   |   |
2---3---5 .....

```

e per 3 motivi principali: 1) sarebbe priva di creatività seppur corretta; 2) musicalmente sarebbe alquanto monotona; 3) si rispetterebbe la regola grammaticale secondo la quale sono vietate le ottave parallele.

Risulta evidente la mancanza del concetto di ritmo che in musica è fondamentale tanto quanto il suono. Questo di per sé definisce i limiti che questo GIOCO ha nella creazione di un pezzo musicale tout-court.

Nel “frammentare” un n° primo, ad es 52711 in 5 2 7 11, dobbiamo semplicemente seguire la logica adottata via via nella composizione, dal momento che 5 2 7 11 corrispondono a quattro note diverse mentre 52711 (vedi calcolo modulare) ad una soltanto; ecco un esempio: se scelgo di suonare la frase musicale : do si re do (dove il primo do ha una durata di due quarti, il si e re un quarto e l'ultimo do quattro quarti), avrò composto la seguente serie numerica: 1 7 2 1. Poiché solo 2 e 7 sono numeri primi, la frase non sarebbe valida per il nostro gioco; in realtà trattandosi di frase musicale va considerata come un “insieme” ed ecco allora che 1 7 2 1 non sono più quattro cifre separate bensì una sola: “1721” che è numero primo. In tal modo, le combinazioni numeriche possono essere lette in senso lato.

Il resto spetta alla creatività del compositore (non più necessariamente musicista); tanto più sarà creativo nelle combinazioni, tanto più interessante sarà l'effetto sonoro proprio come accade ad un musicista vero e proprio. Anche qui Bach docet.

Nota:

* I numeri primi sono infiniti e la matematica modulare ci permette di attribuire un valore sonoro anche a numeri primi complessi. Ma perché utilizzare numeri primi alti quando, musicalmente parlando, non sarebbe necessario? Tale necessità si spiega con un semplice esempio. Poiché devo essere in grado di combinare liberamente le note musicali, devo ovviare l'impossibilità di concatenare numeri non primi ma che comunque voglio e posso usare.

Ad esempio scelgo la sequenza 5 7 2 4. Dove 5,7,2, sono numeri primi ma non 4. Potrebbe essere allora che una combinazione delle quattro cifre sia un numero primo, ma questo non accade come non accade che 5 possa venir collegato al 427 o 247 in quanto non numeri primi. Come si può dunque ovviare a tale difficoltà? Trasformando il 4 in 11: 5 7 2 11= numeri P concatenati; ma anche 52711=n° P. Ed il risultato sonoro sarà uguale: in Do maggiore infatti 5 (SOL) 7 (SI) 2 (RE) 11 (FA cioè 4+7). A questo punto penso sia chiara l'utilità di numeri primi a più cifre.

